

Colle du 18/12 - Sujet 1
Gratuite - Equations différentielles d'ordre 2 et
calcul dans R

Question de cours. Démonstration d'un lemme sur l'ensemble des solutions complexes d'une équation différentielle homogène d'ordre 2 (méthode d'abaissement du degré dans le cas constant et homogène).

Exercice 1. Résoudre suivant les valeurs de m le système $(\mathcal{S}_m)$:
$$\begin{cases} (1-m)x - 3y + 3z = 0 \\ -2x - my + 2z = 0 \\ x - y + (3-m)z = 0 \end{cases}.$$

Exercice 2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :

$$(E) \quad (1+x^2)^2 y''(x) + 2x(1+x^2) y'(x) - y(x) = 0.$$

On pourra poser $t = \arctan(x)$.

Colle du 18/12 - Sujet 2
Gratuite - Equations différentielles d'ordre 2 et
calcul dans R

Question de cours. Montrer que toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un minimum.

Exercice 1. On considère une particule chargée dans un champ magnétique dirigé suivant l'axe (Oz) . On note ω la pulsation associée ($\omega = \frac{qB}{m}$, où q est la charge de la particule, B l'intensité du champ magnétique et m la masse de la particule), $M(t) = (X(t); Y(t); Z(t))$ la position de la particule à l'instant $t \in \mathbb{R}$ et on suppose les fonctions X, Y, Z deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et on pose $M'(t) = (x(t); y(t); z(t)) = (X'(t); Y'(t); Z'(t))$ la vitesse de la particule à l'instant t . On admet que les fonctions x, y et z vérifient les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} x'(t) = \omega x(t) \\ y'(t) = -\omega y(t) \\ z'(t) = 0. \end{cases}$$

Résoudre le système ci-dessus et déduire la vitesse de la particule puis sa position au cours du temps sachant que $M'(0) = (0; 1; 1)$ et $M(0) = (1; 0; 0)$.

Exercice 2. Soit $\alpha \in]0; 1[$. Montrer que

$$|x| < \alpha \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{x^2 + 3x + 5}{x + 5} - 1 \right| < \alpha.$$

Colle du 18/12 - Sujet 3
Gratuite - Equations différentielles d'ordre 2 et
calcul dans $\mathbb{R}$

Question de cours. Déterminer l'ensemble des intervalles non vides, non réduits à un singleton et bornés de $\mathbb{R}$.

Exercice 1. Soit $I =]0; \frac{\pi}{2}[$. On pose

$$(E) : \sin(x)y'' + \cos(x)y' + 2\sin(x)y = 0.$$

1. Résoudre sur I , $(F) : \cos(x)\sin(x)y' + (\cos^2(x) - 2\sin^2(x))y = 0$.
2. Montrer que $\varphi = \cos$ est une solution de (E) .
3. Soit y une fonction deux fois dérivable. On pose $z = y/z$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution d'une équation que l'on précisera.
4. Montrer que

$$\forall x \in I, \quad \frac{1}{\cos^2(x)\sin(x)} = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}.$$

5. Conclure en donnant l'ensemble des solutions de (E) .

Exercice 2.

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{x+y}$.
2. En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}| \leq \sqrt{|x-y|}$.